

التحليل الرياضي ، السنة الثانية

PEST

المدة : ساعة و نصف / 2021-2022

المدرسة العليا لأساتذة التعليم التكنولوجي -

سكيكدة - قسم التكنولوجيا

التمرين الأول: [1] أدرس تقارب التكاملات الموسعة التالية:

$$I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

[2] أ) أثبت أن التكامل :

$$I_3(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

متقارب نظيميا؟

ب) هل $I_3(x)$ متقارب بانتظام؟

التمرين الثاني : ليكن التابع f المعروف بـ:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1) باستعمال النهايات التكرارية، أحسب $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

2) هل $f(x, y)$ مستمرة عند $(0, 0)$ ؟

3) أحسب $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

التمرين الثالث:

1) أحسب التكامل الثنائي: $J_1 = \int \int_D xy(x+y) dx dy$ حيث :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\}$$

2) أحسب التكامل الثنائي: $J_2 = \int \int_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy$ حيث:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1, \quad 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2\}$$

باستعمال تبديل المتغير التالي: $U = \frac{x}{y}$ و $V = \frac{y^2}{x}$

(3) بإستعمال الإحداثيات الكروية المعرفة بالتطبيق Ψ التالية: $\Psi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$ حيث:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad r \geq 0.$$

(أ) أوجد المصفوفة اليعقوبية $J(\Psi)$.

(ب) إذا علمت أن محدد المصفوفة اليعقوبية لـ Ψ هو $\det(J(\Psi)) = r^2 \sin \theta$.

أحسب التكامل $J_3 = \int \int \int_{\Delta} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ حيث:

$$\Delta = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

$$\Psi^{-1}(\Delta) = \left\{ (r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

الحل النموذجي للإمتحان الأول لمقاييس التحليل الرياضي -

التمرين الأول (6 نقاط)

1) دراسة تقارب التكاملات الموضوعة :

لدينا (P) : $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ ، واضح أن التكامل $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ موجود وهذا

مما يعني $x \in [0, 1[$ ومنه :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \lim_{x \rightarrow 1} \left[-2(1-t)^{\frac{1}{2}} \right]_0^x \quad (0,25)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[-2(1-x)^{\frac{1}{2}} + 2 \right] = 2 \quad (0,25)$$

ومنه نستنتج أن السلسلة المعطاة يملك تكامل موزع متقارب .

(ب) $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx$ ، واضح أن التكامل $\int_1^x e^{-t^3} dt$ موجود وهذا

مما يعني $x \in [1, +\infty[$ ومنه :

$$x \leq x^3 \Leftrightarrow -x^3 \leq -x \Leftrightarrow e^{-x^3} \leq e^{-x} \quad (0,25)$$

بما أن :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{e} \quad (0,5)$$

نستنتج أن $\int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx < \infty$ وبما لبقي فإن التكامل الموزع المعطى متقارب .

2) إثبات أن التكامل $I_3(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^t dt$ متقارب نظرياً حيث $x \in \mathbb{R}$

نضع $f(x, t) = \cos(2xt) e^t$

$$(1) |f(x, t)| = |\cos(2xt) e^t| \leq e^t = g(t)$$

(2) السلسلة g قابل للمكاملة محلياً على $[0, +\infty[$

(3) التكامل $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ متقارب لأن :

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^t dt = -e^t \Big|_0^{+\infty} = 1$$

لأن $I_3(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^t dt$ متقارب نظرياً .

(ب) حسب النظرية 4.3.2 التي تقول بأن التقارب النظري $\Rightarrow$ التقارب بالبرنامج
 فإن $I_3(n)$ متقارب بالبرنامج. ①

التمرين الثاني: ليكن التابع f المحرف:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(أ) إيجاد $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ باستعمال النهايات التكرارية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} [0] = 0 = l_1 \quad (0,5)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} \right] = \lim_{y \rightarrow 0} [0] = 0 = l_2 \quad (0,5)$$

كما أن $l_1 = l_2$ ، نتأكد من أن النهاية مساوية للصفر باستخدام الحصر.

$$|f(x,y) - l| = \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} - 0 \right| = \left| \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^4 y}{x^4} \right| = |y| = \rho \quad (0,25)$$

حيث أن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0 \quad (0,25)$$

فإن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad (0,5)$$

(2) هل $f(x,y)$ مستمرة عند $(0,0)$ ؟

لدينا: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Leftrightarrow f(x,y)$ مستمرة عند $(0,0)$ (0,5)

حيث أن $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ حسب السؤال السابق وحيث أن $f(0,0) = 0$ (0,6)

إذن العلاقة (*) محققة إذن $f(x,y)$ مستمرة عند $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{لدينا ③}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y(x^4+y^4) + 4x^3(x^4y)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{4x^7y + 4x^3y^5 + 4x^7y}{(x^4+y^4)^2} = \frac{8x^7y + 4x^3y^5}{(x^4+y^4)^2} \quad (0,78)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4(x^4+y^4) + 4y^3(x^4y)}{(x^4+y^4)^2} = \frac{x^8 + x^4y^4 + 4y^4x^4}{(x^4+y^4)^2} = \frac{-3x^4y^4 + x^8}{(x^4+y^4)^2} \quad (0,78)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{h \times 0}{h^4+0^4} - 0}{h} = 0 \quad (0,78)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\frac{0^4 \times h}{0^4+h^4} - 0}{h} = 0 \quad (0,78)$$

التكامل المتعدد (4 نقاط)

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\} \quad \text{① حساب التكامل المتعدد } I_2$$

$$I_2 = \iint_D xy(x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(x+y) \, dy \, dx \quad (0,5) \quad \text{لدينا}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2y + xy^2) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \quad (0,5)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{x(1-x)^3}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2 + x^4 - 2x^3}{2} + \frac{x - 3x^2 + 3x^3 - x^4}{3} \right) dx$$

نجد التكامل

$$I_3 = \int_0^2 \frac{x}{3} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 dx$$

$$= \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 \Big|_0^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{30} \quad (0,50)$$

② حساب التكامل التالي I_2 حيث $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 1, 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2\}$ لدينا

$$I_2 = \iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy, \quad u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{y^2}{x}$$

نبدأ بكتابة x و y بدلالة u و v حيث

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^2 v \\ y = uv \end{cases}$$

اذن التطبيق $\phi(u,v) \in]\frac{1}{2}, 1[\times]1, 2[\rightarrow \Omega$

$$(u, v) \rightarrow (u^2 v, uv)$$

تقابلتي من الصفح 1 ح، مصفوفة الحقلية بدلالة (u,v) هي

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ v & u \end{pmatrix} \quad (0,6)$$

$$\det J(\phi) = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 v - v u^2 = u^2 v \neq 0 \quad (0,5)$$

ولدينا

$$\phi^{-1}(\Omega) =]\frac{1}{2}, 1[\times]1, 2[$$

قانون تبديل المتغيرات

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\phi^{-1}(\Omega)} f(\phi(u,v)) |u^2 v| du dv \quad (0,5)$$

نطبق هذا القانون على التابع $f(x,y) = \frac{y}{x}$ حيث

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy = \iint_{\phi^{-1}(\Omega)} \frac{1}{u} \times u^2 v du dv = \iint_{\phi^{-1}(\Omega)} uv du dv \quad (0,5)$$

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{x} dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^2 u v dv du = \int_{\frac{1}{2}}^1 u \left(\int_1^2 v dv \right) du$$

ع 33!

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3}{2} u du = \frac{3}{4} u^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{16}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{9}{16}} \quad (0,5)$$

③ باستخدام إحداثيات الكروية التالية المعرفة بالطبيعة $\psi(r, \theta, \phi) = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad r \geq 0$$

Ⓟ 1 إيجاد المصفوفة التفاضلية $J(\psi)$

$$J(\psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

(0,5)

Ⓟ 2 حساب التفاضل J_3

لدينا صيغة تبديل المتغير تكتب من الشكل

$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\psi^{-1}(\Delta)} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) | \det J(\psi) | dr d\theta d\phi$$

ع 34

(0,25)

$$J_3 = \iiint_{\Delta} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_{\psi^{-1}(\Delta)} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta} r \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \iiint_{\psi^{-1}(\Delta)} r^3 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{8} R^4$$

(0,25)